

*llan*  
*6.1857.*

AZ UTOLSÓ SZÁZ ÉV  
A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉBŐL  
MAGYARORSZÁGON

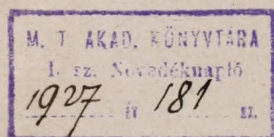
ÍRTA

KÜRSCHÁK JÓZSEF

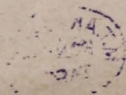
BUDAPEST

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1926



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.





Ha a magyar matematikus visszanéz arra az évszázadra, mely a Magyar Tudományos Akadémiának alapításától napjainkig eltelt, akkor annak elején mint ragyogó kettős csillag lobog fel neki *Bolyai Farkas*-nak és fiának, *János*-nak képe. Két elválaszthatatlan alak. A fiúnak remekműve tette nevüket a matematikában örökre felejthetetlenné; de ha *János* figyelmét nem tereli mélyen gondolkodó atyja korán a tudomány alapjaira, akkor aligha jön létre annak merész alkotása.

*Bolyai Farkas* főműve a Marosvásárhelyt 1832—33-ban két kötetben névtelenül megjelent «Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos . . . introducendi». A szerzőnek alaposságra és önállóságra irányuló törekvését a nagy *Gauss* is elismerte. Nem egy alapvető kérdésnek férközött közelébe; fontosságukat és megoldásuk nehézségeit felismerte, bár kielégítő megoldásuk nem sikerült neki. Különösen kiemelendők a halmazelméletre és a geometria alapjaira vonatkozó kísérletei: az előbbiekkel *Cantor*-nak, az utóbbiakkal saját halhatatlan fiának volt előfutárja. Említendők továbbá a végszerűen egyenlő területekre vonatkozó vizsgálatai, melyek később többeket indítottak e tárggyal való foglalkozásra.

Azon problémák közül, melyekkel *Bolyai Farkas* foglalkozott, a parallelák elmélete érdekelte őt legjobban.

A tapasztalat azt látszik mutatni, hogy egy adott egyeneshez bármely kívüle felvett ponton keresztül egy és csak egy vele párhuzamos egyenest vonhatunk. *Euklides* ezt, bár más fogalmazásban, mint axiómát vagy posztulátumot fogadta el. De a matematikusok mindig érezték, hogy e





kijelentés más természetű, mint *Euklides*-nek többi axiómája és posztulátuma, különösen azt, hogy nem olyan egyszerű. Azért huszonnégy századon keresztül számos fényes elme azon fáradozott, hogy a paralellák axiómáját *Euklides* többi axiómájából és posztulátumából levezesse s ekként theoremává tegye. E fáradozások sok értékes eredménnyel gazdagították a tudományt, de maga az óhajtott bebizonyítás sohasem sikerült. Valamennyi kutató közül a legnagyobb szenvedéllyel *Bolyai Farkas* csüggött a problémán. Megoldását az emberi elme legfontosabb feladatai közé sorozta. Fiának egyszer azt mondta, hogy aki a paralellák axiómájára bebizonyítást találna, akkora gyémántot érdemelne, mint a Föld.

A gyermek lelkében az ilyen és hasonló kijelentésekkel elvetett mag fogékony talajra talált s *Bolyai János* korán kezdett azon fáradozni, hogy az óriás gyémántot kiérdemelje. Mint valamennyi elődje, úgy ő is *Euklides* axiómájának indirekt bebizonyítását kereste, vagyis azt iparkodott kimutatni, hogy minden olyan feltevés, mely a paralellák axiómájával ellenkezik, előbb vagy utóbb logikai ellenmondásra vezet. Ezek az első vizsgálatai a síkban folytak és már mások által is járt ösvényeken maradtak.

Új magaslatokra *Bolyai János* csak akkor emelkedett, midőn a síkról a térre fordította figyelmét. Itt csakhamar csodálatosan meglepő jelenség bontakozott ki előtte egyre világosabban és egyre gazdagabb részletekben. Nem a kívánt bebizonyításhoz jutott, hanem lépésről-lépésre mindjobban kitűnt ennek ellenkezője. A geometriának ugyanis egy olyan rendszerét sikerült kifejteni, melyben *Euklides* axiómája nincsen kielégítve. Sok minden másképen alakul ebben a *Bolyai*-féle térben, mint a közfelfogásnak megfelelő euklidesi térben, de — és ez a matematikai szempontjából a fődolog — logikai ellenmondás nincs benne.

21 éves korában 1923 nov. 3-án Temesvárt kelt levelében már azt írhatta atyjának : «Semmiből egy új, más világot teremtettem». Már akkor elhatározta, hogy mihelyt vizsgálatait befejezi, ezeknek eredményeit kiadja. A munka valóban elkészült és mint a Tentamen I. kötetének függeléke



jelent meg ezzel a címmel: *Appendix Scientiam spatii absolute veram exhibens.*

A munka akkor mondhatni teljesen ismeretlen maradt; de ma a világ minden nyelvére lefordítva, a matematikai irodalom gyöngyei közé számíttatik. *Bolyai János* érdemét és hírnevét nem csökkenti az a tény, hogy vele jóformán egyidejűleg, de tőle függetlenül, az orosz *Lobatschewskij* is feltalálta az ő nem-euklidesi geometriáját, valamint *Gauss* is, aki azonban életében nem nyomtatott ki semmit erre a tárgyra vonatkozó vizsgálataiból.

A két *Bolyai* alkotásai azonban a magyar matematika történetében magukbanálló jelenség voltak. Másoktól a reprodukáláson túlmenő, önálló és eredményes dolgozatokkal évtizedeken át nem találkozunk.

Csak azért, mert 1837-ben a lipcei *Jablonowsky*-társaság egy pályadíj felével jutalmazta, emlitem *Kerekes Ferenc*-nek a képzetes számokról írt értekezését. Szerzője a képzetes számokban ellenmondást lát, még pedig azért, mert természetesen nem felelnek meg kivétel nélkül valamennyi követelménynek, melyekhez a valós számoknál hozzászoktunk. Akiben ennyire hiányzik az absztraháló képesség, aki nem is sejti, hogy minden általánosítás csak bizonyos követeléseknek elengedésével érhető el, az nincs hivatva új elméletek jogosultsága fölött ítélni.

Új, a nyugat tudományos vizsgálataiba belekapcsolódó kor köszöntött be *Hunyady Jenő*-vel. Az ő működése, mely a múlt század hatvanas éveinek közepén kezdődik és 1880 körül éri el tetőpontját, nem folytatása a *Bolyaiak* törekvéseinek, hanem egészen másirányú. A XVIII. században és különösen a XIX. század első felében az algebra és az analitikus geometria egy hatalmas segédeszközzel gyarapodott, a determinánsokkal. *Hunyady* ezeknek volt mesteri kezelője. Irányát legjobban «A kúpszeleten fekvő hat pont föltételi egyenletének különböző alakjairól» című értekezése jellemzi, melyet 1883-ban a Magyar Tudományos Akadémia a nagydíjjal tüntetett ki. Ekkor kapott hazánkban első ízben önálló matematikai vizsgálat akadémiai babért. Ha azt keressük, hogy honnan kapta *Hunyady* e vizsgálatához



az impulzust, akkor elsősorban *Hesse*-nek az involúció feltételi egyenletének különböző alakjaira vonatkozó és néhány hasonló jellegű vizsgálatára kell gondolnunk. Meglehet, hogy *Reiss*-nek a *Mathematische Annalen* II. kötetében 1870-ben megjelent analitikus-geometriai tanulmányai is közreműködtettek, melyeknek tárgya és némely eredménye igen közel jár *Hunyady* vizsgálataihoz. Ami a hatást illeti, *Hunyady*-nak a mondott feltételi egyenletre vonatkozó vizsgálatai, valamint *Scholtz Ágoston*-nak ezekhez csatlakozó dolgozatai a külföldön jelentékeny visszhangot keltettek; főbb eredményeik átmentek a kézikönyvekbe, a tudományos folyóiratokban pedig még ma is jelennek meg ilyen irányú dolgozatok.

Kevéssel *Hunyady* után, a 70-es évek elején kezdte meg *König Gyula* négy évtizedre kiterjedő igen sokoldalú tevékenységét. Mindenütt elsősorban az alapok érdekelték. «Analízis» című munkájának folytatás nélkül maradt első kötetében (1887) az általános számtant és az elemi függvénytant tárgyalta a kor színvonalának megfelelően több eredeti részzel. Számos algebrai dolgozat után 1903-ban az algebrai mennyiségek általános elméletéről megjelent munkájában különösen a modulus-rendszerek elméletét gyarapította alapvető fontosságú vizsgálatokkal. A másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó vizsgálatai átmentek a kézikönyvekbe: különösen *Goursat* részletesen foglalkozik velük. Egyszerűségükkel és megkapóan szemléletes voltukkal tűnnek ki a halmazelmélet némely alaptételére adott bebizonyításai. A logika, aritmetika és halmazelmélet alapjairól halála után megjelent könyve lankadatlan szellemi erejének legjellemzőbb megnyilatkozása. Még sokáig fog tartani, míg a benne tárgyalt kérdésekre a tudomány teljesen kielégítő feleletben fog megnyugodni; de *König*-nek a formális logika gondolkörének ellenmondástól ment voltának problémájára vonatkozó eredményei ma is minden vitán felül állanak.

Ugyancsak a 70-es években kezdték meg tudományos pályájukat *Réthy Mór* és *Farkas Gyula*. *Réthy* vizsgálatai az abszolút geometriára, a végszerűen egyenlő területekre, a mechanika elveire és a hidrodinamikára vonatkoznak. *Farkas*





tevékenységének súlypontja a mechanikára és elméleti fizikára esik. Matematikai szempontból a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó fontos vizsgálatait kell kiemelnünk. Csak mély hódolattal hajolhatok meg a köztünk időző, 80-ik évét élő tudós előtt, ki ismételve ugyanolyan érdeklődéssel tért vissza erre a tárgyra, amilyen odaadással a tudománynak szentelt egész életén át az elméleti fizika átalakulásának minden fázisát figyelemmel kísérte, eredményeit lelkébe fogadta és reájuk dolgozataival reagált.

Azok közül, kik a 80-as években kezdték meg tudományos működésüket, *Schlesinger Lajos*-nak a lineáris differenciálegyenletekre és differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó terjedelmes vizsgálatai a világirodalomban kiváló helyet foglalnak el. Nagyszámú értekezésen kívül egy három kötetből álló monográfiát és két kisebb munkát írt erről a tárgyról, továbbá egy referátumot e tudományágnak 1865—1909. való történetéről. A matematikának több más modern fejezetéről is írt kézikönyveket. Fáradhatatlanul munkálkodik közre *Gauss* tudományos hagyatékának feldolgozásán és egy tudományos *Gauss*-életrajzhoz szükséges anyagnak gyűjtésén és közlésén. Kiváló történeti érzéke és kegyelele vezette a *Bolyai*-akra vonatkozó adatok gyűjtésében, valamint ama magas színvonalú emlékünnepe rendezésben is, mellyel a kolozsvári egyetem 1902-ben *Bolyai János* születésének századik évfordulóját megünnepelte.

*Vályi Gyula* figyelemreméltó dolgozatokat írt elemi számelméleti és geometriai kérdésekről. Doktori értekezése azokkal a parciális differenciálegyenletekkel foglalkozik, melyek

$$V(p, q) \, dx \, dy$$

alakú integrandusok kettős integráljainak variálásánál lépnek. Különösen avval a kérdéssel foglalkozik, hogy az ilyen parciális differenciálegyenlet mikor oldható meg a *Monge—Ampère*-féle módszerrel és e módszer alkalmazásánál általában végzendő lépések az adott esetben mennyiben egyszerűsödnek.

*Rados Gusztáv* főbb vizsgálatai a számelmélet és algebra terén mozognak. Az a kritérium, melyet első dolgozatában



annak eldöntésére levezetett, hogy egy magasabb fokú kongruenciának hány egymástól különböző gyöke van, csakhamar közismeretessé lett. A bilineáris és quadratikus alakokra vonatkozó vizsgálatai az indukált és az adjungált helyettesítések karakterisztikus egyenleteinek gyökeire nézve vezettek érdekes eredményre. Továbbá meg kell még emlékeznünk azokról a vizsgálatokról, melyek *Kronecker*-nek az olyan algebrai egyenletekről szóló tételeivel állanak kapcsolatban, melyeknek gyökei az egységkörre esnek.

*Beke Manó* vizsgálatai közül a lineáris differenciálegyenletek irreducibilitására vonatkozó eredményeit *Picard* felvette *Traité d'Analyse* című művébe. Figyelemreméltók az analitikai függvényekre vonatkozó vizsgálatai is. Egy sajátos törekvése, hogy algebrai tételeket a lineáris differenciálegyenletek elméletéből szeret levezetni, a szóbanforgó egyenletet mint karakterisztikus egyenletet fogván fel.

*Tötössy Béla* a negyedrendű felületek elméletét gyarapította egy speciális felület vizsgálatával.

*Klug Lipót* a szintetikus geometria buzgó művelője. E tudományág nem egy kérdéséhez járult jelentékeny adatokkal.

*Suták József* sokoldalú működéséből különösen a vektor-számításnak geometriai és mechanikai alkalmazására vonatkozókat említjük meg.

E helyen kell megemlékeznem saját vizsgálataimról is. Ezek részben a variációszámítási parciális differenciálegyenletek formális elméletére vonatkoznak, részben pedig az értékelt tartományokra.

A múlt századnak utolsó évtizedében kezdte meg működését *Bauer Mihály*. Elemi, de fontos algebrai és számelméleti kérdések elemzéséből kiindulva, fokenként a legmodernebb számelméleti problémákig emelkedett. A *Hensel*-féle alaptételre, általában a diszkriminánsra és a differensre vonatkozó vizsgálatai kiváló helyet foglalnak el a számelmélet irodalmában.

Azoknak a vizsgálatoknak egy részéhez, melyekkel *Bauer* pályája elején foglalkozott, *Gruber Nándor*-nak egy



a *Fermat*-féle kongruenciára vonatkozó eredménye adta az impulzust.

*Bauer*-nál csak kevéssel fiatalabb volt, de irodalmi működését később kezdte meg *Geöcze Zoárd*, ki a felszínszámítás problémájába mélyedt. Midőn a harc téren szerzett betegségének áldozatul esett, halálával a magyar matematikát érzékeny veszteség érte.

Éppen az új század beköszöntésének idejére esik *Fejér Lipót* első dolgozata a *Fourier*-sorokról. Az a gondolat, hogy e sorokat számtani közepekkel összegezte, rendkívül természetesen bizonyult. *Fejér* azóta a hatványsorokra és *Fourier*-sorokra, a közönséges és a trigonometriai polinomokra, az interpolálásra, a végtelen számsorozatok aszimptotikus előállítására a legváltozatosabb vizsgálatokat végezte.

A trigonometrikus sorok szerint való kifejtésre vonatkozóan egy alapvető tételt talált *Riesz Frigyes*. A tételt, melyet *Riesz*-től függetlenül *Fischer E.* német matematikus is felfedezett, ma mint *Riesz—Fischer*-féle tételt idézik. Nem kevésbé fontosak a lineáris funkcionálakra vonatkozó vizsgálatai. Franciául hézagpótló munkát írt a végtelenül sok ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenletrendszerekről.

*Riesz Marcel* vizsgálatai leginkább a trigonometriai és *Dirichlet*-sorokra vonatkoznak. Új és egyszerű bebizonyításokat talált *Fatou* alapvető tételére. A háború alatt *Hardy* val együtt a *Dirichlet*-sorokról írt angol munkát.

*Haar Alfréd* vizsgálatai közül a legismeretesebbek azok, melyek az ortogonális függvények szerinti sorbafejtésre vonatkoznak. A variációszámítás alapegyenleteinek eddigi levezetését megszabadította több elkerülhető megszorítástól. A *Tschebyscheff*-féle problémák elméletét előbbre vitte a konvex testek geometriájának felhasználásával. A függvények aszimptotikus kifejtésére igen általános esetekben használható módszereket talált.

*Pólya György* problémái rendkívül változatosak. Vizsgálatainak főbb tárgyai: bizonyos polinom-sorok összetartása, *Laquerre* egyik algebrai tétele, a tagok egy részének előjelének megváltoztatásával keletkezett hatványsorok,



egész számú együtthatókkal alkotott hatványsorok, melyeknek együtthatói közül csak végezzámmal vannak egymástól különbözők, valószínűség-számítási feladatok. Minden dolgozata meglepő leleményességről és éles kritikáról tanuskodik.

Rokontermészetű kutató *Szegő Gábor*. Vizsgálatainak főbb tárgyai: ortogonális függvény-sorozatok szerinti kifejtések, polinomsorozatok zérushelyei, kerületi értékek. Pályája többször találkozik *Pólya*-éval. *Pólya*-nak a pusztán végezzámú egymástól különböző együtthatót tartalmazó hatványsorokra vonatkozó vizsgálatait folytatva ő jutott az ezekre nézve felvetett kérdés általános megoldására. Egy *Pólya*-val együtt készített munkája a legnagyobb gondossággal és körültekintéssel összeállított példák során át vezeti be az olvasót a modern analízis számos fontos módszerébe és eredményébe.

*Kerékjártó Béla* a topológia számos tételének bebizonyításánál talált lényeges egyszerűsítéseket és e tárgyról becses monografiát írt.

Még sokan vannak, kik hosszabb, sikeres tudományos pályára tekinthetnek vissza, vagy egyes jelentékenyebb eredményekkel tűntek fel. Nem bocsátkozom tevékenységük súlyának összehasonlítására; csak nevüket és főbb működési körüket említem: *Bálint Elemér* (algebra), *Csillag Pál* (sorok összetartása, *Fourier*-féle állandók), *Dienes Pál* (analitikus függvények, funkcionálék, tensor geometria), *Dávid Pál* (iterálás), *Egeváry Jenő* (multilineáris alakok), *Fekete Mihály* (algebrai egyenletek, polinomok, summabilitás, analitikus függvények 0 és 1 helyei), *Grosschmid Lajos* (számelmélet), *Jordán Károly* (valószínűség-számítás), *König Dénés* (halmazelmélet és analysis silus), *Lukács Ferenc* (*Laplace*-sorok), *Sz. Nagy Pál* (gyökök helyzete, görbék), *Neumann János* (halmazelmélet, ideális számok), *Pál Gyula* (Jordan-görbék), *Radó Tibor* (konform leképezés, parciális differenciálegyenletek), *Rédei László* (számelmélet), *Sárközy Pál* (felületelmélet), *Sidon Simon* (*Fourier*-sorok), *Stachó Tibor* (integrálszámítás és függvénytan), *Szász Ottó* (végtelen lánc-törtek, analitikus függvények, *Fourier*-sorok), *Szász Pál* (differencia-számítás), *Szücs Adolf* (variációszámítás), *Valkó István* (halmazok több-



értelmű leképezése), *Veress Pál* (függvénytan és halmazelmélet), *Vörös Cyrill* (*Bolyai*-féle geometria).

Csodálattal tekinthetünk vissza a száz év előtti fényes kezdetre, midőn *Bolyai János* olyan gondolatokkal lepte meg a világot, melyek megértésére *Gauss* még nem tartotta érettnak a kort. De büszkeséggel tölthet el jelenünk is, midőn annyian serényen művelik a matematikát és eredményeik az egész világon elismerést találnak. Csüggedetlenül előre!

### **Die letzten hundert Jahre aus der Geschichte der Mathematik in Ungarn.**

Von *Josef Kürschák* o. M.

Die Arbeit beginnt mit der Würdigung *Wolfgang Bolyais* und seines Sohnes *Johanns*, dem wir den klassischen Appendix über die absolute Geometrie verdanken.

Neben ihnen hat sich aber damals in Ungarn niemand erfolgreich mit selbständigen mathematischen Untersuchungen beschäftigt. Ein Aufschwung beginnt erst in den 60-iger Jahren mit *E. Hunyady* und dann besonders mit *Julius König*.

Die Arbeit gibt dann eine kurze Übersicht darüber, wie seither sich immer mehr Ungarn mit mathematischen Untersuchungen befassten und ihre Tätigkeit auf alle Gebiete dieser Wissenschaft erstreckten.

---

